Clase 16: Continuación.

Peter Hummelgens

9 de enero de 2007

1. Aplicaciones de las SF.

Recordemos que en la Clase 11 ya resolvimos un problema de la conducción en una barra vía separación de variables y SF (de senos). Este fue nuestro primer ejemplo de un problema de valor inicial y en la frontera para la ecuación de calor (1-dimensional)

$$u_t - ku_{xx} = f(x,t) \tag{1}$$

donde $f(x,t)$ una función dada representando fuentes externas de calor (en el problema que resolvimos teníamos $f(x,t) = 0$ y la Ed era entonces homogénea). En esta clase consideramos además problemas asociados con la ED de Laplace (2-dimensional)

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \tag{2}$$

y la ecuación de ondas (1-dimensional)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{3}$$

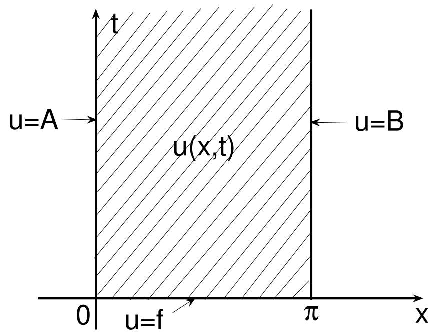
que describe por ejemplo la propagación de ondas transversales en una cuerda (siendo c la velocidad de propagación). La ED (2) surge en la hidrodinámica, la electrostática, etc.

Ejemplo 1. *Sea el problema de la conducción de calor con una barra 1-dimensional de longitud π, descrito por*

$$u_t = ku_{xx}; \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \tag{4}$$

$$u(0,t) = A, \quad u(\pi,t) = B; t \geq 0 \tag{5}$$

$$u(x,0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{6}$$



Como las condiciones de borde (5) (extremos a temperaturas constantes A y B distintos de 0) no son homogéneas, no podemos directamente aplicar separación de variables (poniendo $u(x,y) = X(x)T(t)$ obtenemos $X(0)T(t) = A$, $X(\pi)T(t) = B$, pero como $A, B \neq 0$ no obtenemos condiciones de borde para $X(x)$ en $x = 0$ y $x = \pi$). La idea es entonces convertir el problema en otro equivalente donde las condiciones de borde sí son homogéneas. Con este fin introducimos la función

$$v(x,t) = u(x,t) + \alpha x + \beta, \tag{7}$$

donde determinamos α, β de manera tal que $v(0,t) = 0$, $v(\pi,t) = 0$, $t \geq 0$ (condiciones de borde homogéneas). Tenemos $v(0,t) = 0 \Longrightarrow 0 = A + B \Longrightarrow \beta = -A$, luego $v(x,t) = 0 \Longrightarrow 0 = \beta + \alpha\pi - A \Longrightarrow \alpha = \frac{A-B}{\pi}$, de modo que (7) da

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{A-B}{\pi}x - A; \;\; 0 \leq x \leq x, \;\; t \geq 0 \tag{8}$$

De (4) y (8) tenemos $v_t = u_t$, $v_{xx} = u_{xx} \Longrightarrow v_t = kv_{xx}$, y de (6), (8) obtenemos $v(x,0) = f(x) + \frac{a-B}{\pi}x - A$, de modo que nuestro problema (4)-(6) se convierte en

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx}; & 0 \leq x \leq \pi, \;\; t \geq 0 \\ v(0,t) = 0, \;\; v(x,t) = 0; & t \geq 0 \textit{(condiciones de borde)} \\ v(x,0) = f(x) + \frac{A-B}{\pi}x - A; & \textit{(condición inicial)} \end{cases}$$

donde las condiciones de borde sí son homogéneas.

El nuevo problema ya resolvimos en la Clase 11, de modo que podemos escribir directamente la solución:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 t} \operatorname{sen}(nx),$$

es decir, con (8)

$$u(x,t) = -\frac{A-B}{\pi}x + A + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2 t} \operatorname{sen}(nx) \tag{9}$$

con

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[f(x) + \frac{A-B}{\pi}\,x - A\right]\operatorname{sen}(nx)dx; \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Observa que en (9) tenemos $e^{-kn^2t} \to 0$ *cuando* $t \to \infty$*, de modo que la temperatura* $u(x,t)$ *tiende a un valor límite*

$$u_\infty(x) = u(x,\infty) = A - \frac{A-B}{\pi}x \;\; \textit{cuando} \;\; t \to \infty.$$

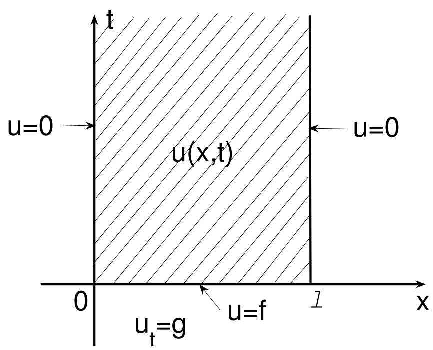
Ejemplo 2. *Consideramos las oscilaciones transversales de una cuerda de longitud* ℓ *con sus extremos* $x = 0$, $x = \ell$ *fijos, dadas su posición inicial* $f(x)$ *y velocidad inicial* $g(x)$.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}; \;\; 0 \leq x \leq \ell, \;\; t \geq 0 \tag{10}$$

$$u(0,t) = 0, \;\; u(\ell,t) = 0; \;\; t \geq 0 \;\; \textit{(condiciones de borde)} \tag{11}$$

$$u(x,0) = f(x); \;\; 0 \leq x \leq \ell \;\; \textit{(condición inicial)} \tag{12}$$

$$u_t(x,0) = g(x); \;\; 0 \leq x \leq \ell \;\; \textit{(condición inicial)} \tag{13}$$



Sustituyendo $u(x,t) = X(x)T(t)$ *en (10) (<u>separación de variables</u>) da*

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = -\lambda, \quad \textit{una constante} \tag{14}$$

Luego con (11) resulta para $X(x)$ *el*

$$PAA \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \;\; 0 \leq x \leq \ell \\ X(0) = 0, \;\; X(\ell) = 0 \end{cases}$$

ya resuelto en la Clase 11, con resultado:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{autovalores}\ \ \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{\ell^2};\ \ n = 1,2,3,\cdots \\ \textit{autofunciones}\ \ X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right). \end{array}\right\} \tag{15}$$

Para $\lambda = \lambda_n$ *tenemos de (14),*

$$\left.\begin{array}{l} T_n''(t) + \lambda_n c^2 T_n(t) = 0,\ \ \textit{con solución general (poniendo } \alpha_n = n\pi/\ell\textit{)} \\ T_n(t) = A_n \cos(\alpha_n ct) + B_n \operatorname{sen}(\alpha_n ct),\quad \textit{luego}\ \ T_n'(t) = -\alpha_n cA \operatorname{sen}(\alpha_n ct) + \alpha_n cB\cos(\alpha_n ct). \end{array}\right\} \tag{16}$$

De (15), (16) tenemos funciones de $u_n(x,t)$ *que satisfacen (10), (11) dados por*

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}(\alpha_n x)[A_n\cos(\alpha_n ct) + B_n\operatorname{sen}(\alpha_n ct)]\,;\ n = 1,2,3,\cdots. \tag{17}$$

Como la ED (10) y las condiciones de borde son <u>*homogéneas,*</u> *cualquier combinación lineal de las* $u_n(n,t)$ *también satisface (10), (11).*

Buscamos ahora la solución de (10)-(13) en la forma

$$\left.\begin{array}{l} u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{a} \operatorname{sen}(\alpha_n x)[a_n\cos(\alpha_n ct) + h_n\operatorname{sen}(\alpha_n ct)],\ \ \textit{entonces} \\ u_t(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\alpha_n x)[-\alpha_n a_n c\operatorname{sen}(\alpha_n ct) + \alpha_n b_n c\cos(\alpha_n ct)] \end{array}\right\} \tag{18}$$

De (12), (18) tenemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\alpha_n x);\ \ 0 \le x \le \ell \tag{19}$$

y de (13), (18) tenemos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n c\operatorname{sen}(\alpha_n x);\ \ 0 \le x \le \ell. \tag{20}$$

Siendo entonces (19), (20) las SF de senos de $f(x)$ *y* $g(x)$ *respectivamente, tenemos (ver la Clase 14)*

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} f(x)\operatorname{sen}\left(\dfrac{nx}{\ell}x\right)dx;\ \ n = 1,2,3,\cdots \\ b_n = \dfrac{2}{c\alpha_n\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} g(x)\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right)dx;\ \ n = 1,2,3,\cdots. \end{array}\right\} \tag{21}$$

Sustitución de (21) en la primera relación de (18) da la <u>*solución formal*</u> *del problema (10)-(13) en forma de SF.*

Extendiendo $f(x)$, $g(x)$ a todo $\mathbb{R}$ como funciones impares y periódicas de período 2ℓ (extendiendo de la misma manera la solución $u(x,t)$) podemos escribir la solución formal en forma más conveniente (sin series) como (solución de D'Alambert)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds; \quad -\infty < x < \infty \quad t \geq 0$$

(ver ejemplo 26 de la sección 5 de la guía del Prof. Hummelgens).

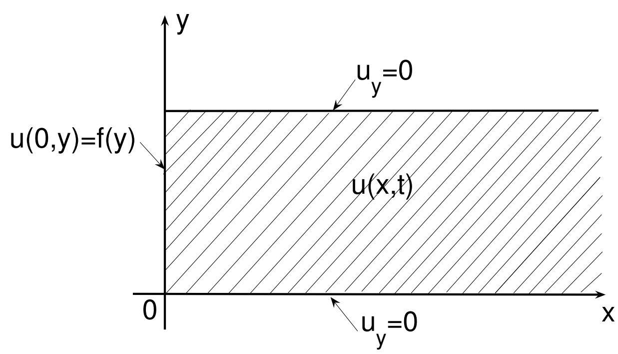
Ejemplo 3. *: Sea el problema*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \pi \tag{22}$$

$$u_y(x,0) = 0, \quad u_y(x,\pi) = 0; \quad 0 \leq x < \infty \tag{23}$$

$$u(0,y) = \left|\frac{\pi}{2} - y\right| = f(y); \quad 0 \leq y \leq \pi \tag{24}$$

$$u(x,y) \;\; \textit{acotada en} \;\; 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \pi. \tag{25}$$



Separación de variables en (22) da

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda. \tag{26}$$

De (26) (la ED para $Y(y)$), (23) obtenemos el PAA

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0; & 0 \leq y \leq \pi \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

con soluciones (ver la Clase 12)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{autovalores} \;\; \lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = n^2 \;\; (n = 1,2,3,\cdots) \\ \textit{autofunciones} \;\; Y_0(y) = 1, \quad Y_n(y) = \cos(ny) \;\; (n = 1,2,3,\cdots). \end{array}\right\} \tag{27}$$

Para $\lambda = 0$ *tenemos de (26) que* $X''(x) = 0 \Longrightarrow X(x) = Ax + B$, *donde necesariamente* $A = 0$ *ya que* $X(x)$ *tiene que ser* <u>*acotada*</u> *en* $0 \leq x \leq \infty \Longrightarrow X(x) = B$ *y tomando* $B = 1$ *resulta* $X_0(x) = 1$. *Para* $\lambda = \lambda_n$ *tenemos de (26) que*

$$X_n''(x) - n^2 X(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_n(x) = A_n e^{-nx} + B_n e^{nx},$$

donde necesariamente $B_n = 0$ *para que* X_n *sea acotado en* $0 \leq x < \infty \Longrightarrow$ *tomamos* $X_n(x) = e^{-nx}$. *En resumen:*

$$X_0(x) = 1, \;\; X_n(x) = e^{-nx} \;\; (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

y de esto y (27) obtenemos las

$$u_0(x,y) = 1, \;\; u_n(x,y) = \cos(ny)e^{-nx} \;\; (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{28}$$

que todos satisfacen (22), (23), (24). Cualquier combinación lineal de ellas también satisfacen (22), (23), (24) porque la ED (22) y las condiciones de borde (23) son <u>*homogéneas*</u>.

Buscamos la solución de (23)-(25) en la forma

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ny)e^{-nx}; \;\; 0 \leq x < \infty, \;\; 0 \leq y \leq \pi. \tag{29}$$

De (24), (28) tenemos

$$f(y) = \left|\frac{\pi}{2} - y\right| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ny) \tag{30}$$

es decir, los a_0, a_n *son los coeficientes de Fourier de* $f(y)$ *en su SF de cosenos. De la Clase 14 sabemos que*

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\pi}{2} - y\right| dy \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\pi}{2} - y\right| \cos(ny)dy, \;\; (n = 1, 2, \cdots.)$$

Calculando las integrales usando <u>*derivadas generalizadas*</u> *encontramos (¡verifique!)*

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \;\; a_n = \begin{cases} 0; & n \text{ impar} \\ \frac{1}{\pi m^2}\left[1 - (-1)^m\right]; & n = 2m \;\; (m = 1, 2, \cdots.) \end{cases}$$

de donde con (29) tenemos

$$u(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^m]}{m^2} e^{-2mx} \cos(2my)$$

o

$$u(x,y) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}e^{-2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}m^2e^{-4nx}\cos[(2n+1)y]; \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Como la extensión par con período 2π de $f(y)$ a $-\infty < y < \infty$ es continua y C^1 a trozos, la serie converge a $u(x,y)$ en $0 \leq y \leq \pi$ para todo $x \in [0;\infty)$ fijo.

Hemos dado tan solo algunos ejemplos básicos ya que el tiempo no alcanza para dar más ejemplos en clase. Para más ejemplos ver la guía del Profesor P. F. Hummelgens, donde también aparecen ejemplos donde la ED y/o las condiciones de borde son no homogéneas. Estos ejemplos son importantes para las aplicaciones. Confiamos en que el estudiante sea capaz de entender los ejemplos de la guía a a su propia cuenta.